Fourierreihen und ihre Anwendung am physikalischen Beispiel der schwingenden Saite

WISSENSCHAFTLICH-PRAKTISCHE ARBEIT

Universität Leipzig
Sektion Mathematik

eingereicht von einer Arbeitsgruppe der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung "Wilhelm Ostwald", Leipzig, Klassen 11/2 und 11/3 :

Carsten Bundesmann

Frank Neutzler

Arbeitsgruppenleiter : Dr.rer.nat.Gittel

Leipzig, den 27.Mai 1991

Bibliographische Beschreibung

Thema	:	Anwendung der Fourierreihen am Beispiel der schwingenden Saite
Autoren	:	Neutzler , Frank
		Bundesmann , Carsten
Betreuer	:	Dr.rer.nat. Gittel
Erstellungszeitraum	:	Okt.'90 - Mai'91
Seitenzahl	:	43

In dieser WPA-Arbeit ist das Hauptthema das Problem der schwingenden Saite. Um dieses vollständig lösen zu können, sind einige wichtige Vorbetrachtungen zu Funktionen- und speziell zu Fourierreihen aufgeführt.

THESEN

1. Funktionenreihen können ohne weiteres von Partialsummenfolgen hergeleitet werden. Ihre Glieder sind Funktionen einer beliebigen Variablen.

2. Die gleichmäßige Konvergenz ist Grundvoraussetzung für wichtige Eigenschaften von Funktionenfolgen, z.B. für die Integration und Differentiation.

3. Fourierreihen sind spezielle Funktionenreihen, deren Glieder trigonometrische Funktionen sind. Grundlegende Eigenschaften und Anwendungen sind aufgeführt.

4. Viele periodische Vorgänge oder mathematische Funktionen lassen sich durch eine Fourierreihe beschreiben, wenn letztere gegen diese Funktion gleichmäßig konvergiert. Einige Beispiele in dieser Arbeit sollen dies verdeutlichen.

5. Das Problem der schwingenden Saite war der Ausgangspunkt für das mathematische Gebiet der Analysis und für die Fourierreihen.

6. Wenn man die Kräfte, die an der Saite angreifen, betrachtet, gelangt man zu einer partiellen Differentialgleichung, deren Herleitung ausführlich beschrieben ist.

7. Die Lösung diese partiellen Differentialgleichung ist eine trigonometrische Reihe (Fourierreihe).

8. Die Reihe konvergiert gegen den zu beschreibenden Vorgang der schwingenden Saite, wenn die Funktion f(x) (Ausgangsauslenkung) viermal und die Funktion g(x) (Anfangsgeschwindigkeit) dreimal differenzierbar sind, und die vierte bzw. dritte Ableitung beschränkt sind.

9. Diese Arbeit wurde erstellt, um das Problem der schwingenden Saite ausführlich und für jeden mathematisch interessierten verständlich zu erklären, da die Literaturquellen nur grob den Lösungsweg angeben.

Резюме

Главная проблема этой научной практической работы дрожащая струна. Полное решение проблемы можно прочитывать в третий (в последной) главе.
Сначала можно изнать, что функциональные ряды и равномерная сходимость.
В следующий главе рассказываются о рядах Фурье (специальные функциональные ряды).
Первая и вторая глава содержат важные предположения решения главной проблемы.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Zuerts möchten wir uns recht herzlich bei Herrn Dr. Gittel, unserem WPA-Betreuer, bedanken. Er stand uns immer mit Rat und Tat zur Seite auch außerhalb der regulären Zeiten. Es war manchmal sehr entscheidend, daß er sich unsere Probleme geduldig anhörte und mit kleinen Tips uns wieder auf den richtigen weg brachte. Die Beschäftigung mit der wissenschaftlichen Literatur und uns noch unbekannten Themen war recht interessant. Sicher wird es uns in der Zukunft beim Mathematikstudium helfen können.

Nun noch einige Dankesworte an unsere Informatiklehrer, besonders an Herrn Scheuermann und Herrn Dr. Heynig. Sie haben es uns ermöglicht, diese Arbeit in dieser Form schreiben zu können. Dabei mußten sie sogar persönliche Opfer bringen.Danke.

1. Funktionenreihen

1.1. Einführung

Wir setzen voraus, daß dem Leser dieser Arbeit bereits Zahlenfolgen und -reihen bekannt sind. Da wir uns mit Fourierreihen, also Funktionenreihen beschäftigen, folgt hier eine Einführung in dieses Gebiet.

Definition der Funktionenreihen:
Wir betrachten eine Reihe, deren Glieder keine Zahlen sondern Funktionen einer Variablen x sind, die alle im Definitionsbereich X definiert sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \quad . \quad (1)$$

Wenn diese Reihe für jedes $x \in X$ konvergiert, dann ist ihre Summe ebenfalls eine Funktion f(x). Bezeichnet man mit $f_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihe:

$$f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x) \quad , \quad (2)$$

dann ist f(x) bestimmt durch:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}[f_n(x)] \quad . \quad (3)$$

(/1/S.435f.)

1.2. Gleichmäßige Konvergenz

In diesem Abschnitt wollen wir auf die gleichmäßige Konvergenz eingehen. Diese Eigenschaft ist von der ihnen schon bekannten einfachen Konvergenz abgeleited und auf Funktionenreihen angewendet wurden. Die Gleichmäßige Konvergenz ist eine Grundvoraussetzung für viele Eigenschaften dieser Reihen.

Definition: "Die für alle x aus dem Intervall X konvergente Reihe (1) heißt gleichmäßig konvergent in diesem Intervall, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von x unabhängige Zahl N deart existiert, daß für $n > N$ die Ungleichung:

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon \qquad \text{oder} \qquad |\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

erfüllt ist, und zwar für alle x X gleichzeitig."

(/1/ Seite 440)

Dabei ist $\varphi_n(x)$ der Rest der Reihe nach dem n-ten Glied definiert als :

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x)-f_n(x) \tag{5}$$

Es folgt nun das **Weierstraßsche Kriterium** für die gleichmäßige Konvergenz, das man oft auch als Majorantenkriterium bezeichnet. "Wenn die Glieder der Funktionenreihe (1) die Ungleichungen

$$|u_n(x)| \leq c_n \qquad (n=1,2,3,...) \tag{6}$$

erfüllen, wobei c_n das allgemeine Glied einer gewissen konvergenten Zahlenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 +...+ c_n + ... \tag{7}$$

ist, so konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig."

(/1/ Seite 443)

Beweis: Aus (6) folgt:

$$|u_1(x)+...+u_n(x)| \leqq c_1 +...+ c_n$$

Dann läßt sich nach dem allgemeinen Konvergenzkriterium von Couchy für Zahlenfolgen zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N finden, so daß für $n > N$ die rechte Seite und somit auch die linke Seite kleiner als wird, für alle x gleichzeitig.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

1.3. Eigenschaften der Summe einer Reihe

Stetigkeit

Satz: Die Funktionen $u_n(x)$ seien in $X=[a,b]$ definiert und in $x=x_0$ dieses Intervalles stetig. Wenn die Reihe aus den $u_n(x)$ in X gleichmäßig konvergiert, so ist auch die Summe dieser Reihe in x_0 stetig.

Beweis: Mit den früheren Bezeichnungen gilt.

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x)$$

und insbesondere

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

woraus

$$|f(x)-f(x_0)| \leqq |f_n(x)-f_n(x_0)|+|\varphi_n(x)|-|\varphi_n(x_0)|$$

folgt. Da die Reihe gleichmäßig konvergiert, läßt sich ein festes N finden, so daß

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{mit } n>N \qquad \text{für alle } x \in X, \text{ also}$$

auch für $x=x_0$ gilt. Für diese n ist $f_n(x)$ Summe endlich vieler stetiger Funktionen, also auch stetig.
Deshalb ist für

$$|x-x_0| < \delta$$

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \varepsilon \quad .$$

In der Summe folgt dann :

$$|f(x)-f(x_0)| \leqq 3 \qquad \text{für } |x-x_0| < \delta \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Folgerung: Wenn die $u_n(x)$ in allen $x_0 \in [a,b]$ stetig sind, dann ist $f(x)$ im gesamten Intervall $[a,b]$ stetig.

Gliedweiser Übergang zum Grenzwert

Satz : In Kurzform lautet dieser Satz :

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\lim_{x \to x_0} u_n(x)\} \quad .$$

Der Beweis kann in Quelle /1/ auf Seite 451 nachgelesen werden.

Gliedweise Integration

Satz: Eine gleichnäßig konvergente Reihe aus stetigen Funktionen ist gliedweise integrierbar:

$$\int f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x)dx$$

(Beweis: siehe /1/ Seite 452)

Gliedweise Differentation

Satz: Die Funktionen $u_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ seien in $X=[a,b]$ definiert und mögen dort stetige Ableitungen $u_n'(x)$ besitzen. Wenn in diesem Intervall nicht nur die Reihe der $u_n(x)$ konvergiert , sondern auch die aus den Ableitungen bestehende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

gleichmäßig konvergiert, so besitzt auch die Summe $f(x)$ der Reihe der $u_n(x)$ in X eine Ableitung, und es gilt :

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

(Beweis: siehe /1/ Seite 454f)

2. Fourierreihen

2.1. Einführung

Im nun folgenden Kapitel wollen wir uns mit speziellen Funktionenreihen beschäftigen, mit den Fourierreihen. Ihre Glieder sind die uns aus dem Mathematikunterricht bekannten trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus.

$$r(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n*\cos(nx)+b_n*\sin(nx)] \qquad (\#)$$

Die Fourierreihen werden zur Beschreibung von periodischen Erscheinungen, d.h. Erscheinungen die sich nach Ablauf einer Periode T wiederholen, genutzt. Das hat mit den Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion zu tun, die die Periode 2π besitzen.
Mit Hilfe der Fourierreihen kann man nicht nur Vorgänge mathematisch beschreiben, sondern auch Funktionen annähernd genau wiedergeben. Dazu sind einige Beispiele am Ende dieses Kapitels angegeben.
Dabei gilt folgendes :
"Ist die Funktion f der Periode 2π in eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe (#) entwickelbar, so ist diese notwendigerweise ihre **Fourierreihe.**" (Quelle: /2/ S.413)
Man schreibt für (#) auch häufig:

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n*\cos(nx)+b_n*\sin(nx)] \ .$$

Dabei vermeidet man das Gleichheitszeichen zwischen der zu beschreibenden Funktion f und der Reihe r, da letztere nicht unbedingt gegen erstere konvergieren muß.
Nun ist die Frage, wie man die Fourierkoeffizienten a_n, b_n bestimmt. Dazu verwenden wir eine Methode, die Euler im 18. Jh. und Fourier im 19.Jh. unabhängig voneinander entwickelten. Die Herleitung wollen wir im folgenden nachvollziehen.

Vorbetrachtungen:

1. $$\begin{aligned}2\cos(ax)\cos(bx)&=2\cos(ax)\cos(bx)+\sin(ax)\sin(bx)-\sin(ax)\sin(bx)\\&=[\cos(ax)\cos(bx)+\sin(ax)\sin(bx)]\\&\quad+[\cos(ax)\cos(bx)-\sin(ax)\sin(bx)]\\2\cos(ax)\cos(bx)&=\cos[(a-b)x]+\cos[(a+b)x]\end{aligned}$$
(laut Additionstheorem)
Spezialfall a=b :
$$2\cos^2(ax)=1+\cos(2ax)$$

2. $$\begin{aligned}2\sin(ax)\cos(bx)&=2\sin(ax)\cos(bx)+\cos(ax)\sin(bx)-\cos(ax)\sin(bx)\\&=[\sin(ax)\cos(bx)+\cos(ax)\sin(bx)]\\&\quad+[\sin(ax)\cos(bx)-\cos(ax)\sin(bx)]\\2\sin(ax)\cos(bx)&=\sin[(a+b)x]+\sin[(a-b)x]\end{aligned}$$
(laut Additionstheorem)
Spezialfall a=b :
$$2\sin(ax)\cos(ax)=\sin(2ax)$$

3. $$\begin{aligned}2\sin(ax)\sin(bx)&=2\sin(ax)\sin(bx)+\cos(ax)\cos(bx)-\cos(ax)\cos(bx)\\&=[\sin(ax)\sin(bx)+\cos(ax)\cos(bx)]\\&\quad+[\sin(ax)\sin(bx)-\cos(ax)\cos(bx)]\end{aligned}$$

$$2\sin(ax)\sin(bx)=\cos[(a-b)x]-\cos[(a+b)x]$$

(laut Additionstheorem)

Spezialfall $a=b$:

$$2\sin^2(ax)=2-2\cos^2(ax)$$
$$=1-\cos(2ax)$$

$r(x)$ wird als eigentlich oder absolut uneigentlich integrierbar (s.Anmerkung 3) vorausgesetzt. Dadurch ist es uns möglich die Reihe von $-\pi$ bis π zu integrieren.

$$\int_{-\pi}^{\pi} r(x)\,dx=2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right]$$

Für die Glieder innerhalb der eckigen Klammer gilt :

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx=a_n\frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx=-b_n\frac{\cos(nx)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Somit bleibt nur $2\pi a$ übrig.
Daraus folgt :

$$a_0=\frac{1}{2*\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx.$$

Nun bestimmen wir die restlichen Koeffizienten a_m, b_m in dieser Reihenfolge.Dazu multiplizieren wir $r(x)$ mit $\cos(mx)$ und integrieren wiederum von $-\pi$ bis π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} r(x)\cos(mx)\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx\right]$$

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx=\frac{\sin(mx)}{m}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$$

Für $m\neq n$ gilt :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos[(n+m)x]+\cos[(n-m)x]\}\,dx$$

(laut 1.)

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(n+m)x]}{n+m}+\frac{\sin[(n-m)x]}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\sin[(n+m)x]+\sin[(n-m)x]\}\,dx$$

(laut 2.)

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos[(n+m)x]}{n+m} + \frac{\cos[(n-m)x]}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Und für $n=m$ ist :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\,dx$$

(laut 1.)

$$= \left|\frac{-\cos(2mx)}{4m}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1+\cos(2mx)]\,dx$$

(laut 2.)

$$= \frac{1}{4}\left[2x+\frac{\sin(2mx)}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Es bleibt somit nur das Glied mit a_m übrig. Alles andere wird Null. Für a_m ergibt sich :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx.$$

Wenn wir $r(x)$ mit $\sin(mx)$ multiplizieren, die analogen Umformungsschritte durchführen, erhalten wir folgende Formel für b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx.$$

Um auf dieses Ergebnis zu kommen, braucht man die Vorbetrachtung 3. anstatt 1. Wir setzten voraus , daß die Reihe gliedweise integrierbar ist. Das folgt schon aus der gleichmäßigen Konvergenz, die wir im ersten Kapitel näher beschrieben haben und auf einer der vorigen Seiten forderten .

(/2/ S.411 ff.)

Nun ist die Frage, wann eine Fourierreihe gleichmäßig konvergent ist. Wir nehmen das Weierstraßsche Majorantenkriterium zu Hilfe. Da $|\sin(x)| <= 1$ können wir die Reihe $|r(x)|$ folgendermaßen abschätzen:

$$|r(x)| \leqq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Wenn man annimmt, daß

$$|a_n| \leqq \frac{K}{n^2} \qquad \text{und} \qquad |b_n| \leqq \frac{L}{n^2} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

wobei K und L Konstanten sind, lassen sich die Glieder von $|r(x)|$ folgendermaßen abschätzen:

$$|a_n|+|b_n| \leq \frac{K+L}{n^2} \qquad (n>0).$$

Da $\frac{L+K}{n^2}$ Glieder einer konvergenten Reihe sind und $|a_0|$ eine konstante Zahl ist, gilt :

r(x) ist gleichmäßig konvergent.
(Weierstraßsches Kriterium)

2.2. Nichtperiodische Funktionen

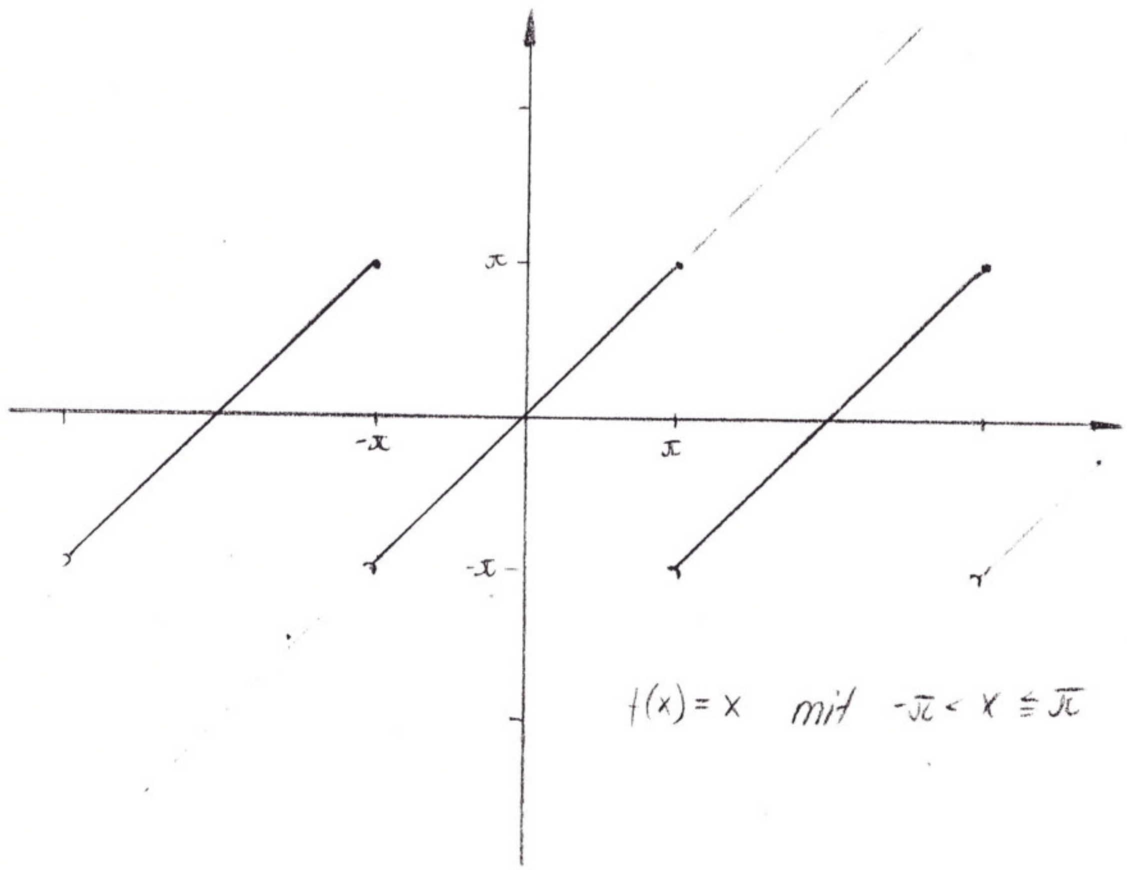
Bisher sind wir nur von Funktionen ausgegangen,die periodisch sind und zwar für alle reellen x mit der Periode 2π. es gibt aber auch viele, die nicht periodisch oder nur im Intervall $[-\pi;\pi]$ definiert sind. Damit wir das vorherige auch auf solche Funktionen anwenden können, führen wir eine Hilfsfunktion g(x) ein. Für diese gilt :

$$g(x) = f(x) \qquad (-\pi < x \leq \pi)$$

$$g(-\pi) = g(\pi).$$

Für die anderen reellen x setzen wir g periodisch fort.
(/2/ Seite 433)

Das in diesem Kapitel beschriebene wird in den 3 Beispielen in 2.5. veranschaulicht dargestellt, besonders in Beispiel 3.



2.3. Beliebige Intervalle

Nun geht es um Funktionen, deren Periode nicht 2π ist. Das Grundintervall sei $[-L;L]$ der beliebige Länge 2L ($L>0$). Nun substituiert man einfach wie folgt :

$$x = \frac{yL}{\pi} \qquad (-\pi \leq y \leq \pi)$$

Man erhält die Funktion $f\left(\frac{yL}{\pi}\right)$ von y im Intervall $[-\pi;\pi]$,

auf die die vorhergegangenen Betrachtungen anwendbar sind, da L und π als Konstanten keinen Einfluß auf die Lösung haben.
Wir erhalten die Fourierreihe:

$$f\left(\frac{yL}{\pi}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)]$$

Deren Koeffizienten lassen sich wie folgt berechnen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{yL}{\pi}\right) \cos(ny)\,dy \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{yL}{\pi}\right) \sin(ny)\,dy \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Nun machen wir ganz einfach unsere Substitution rückgängig und erhalten:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}],$$

wobei die Sinus und Cosinus Funktionen von $\pi x:L$ sind. Diese Substitution kann man auch bei der Koeffizientenberechnung anwenden. Es folgt :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Es ist auch möglich, daß das Intervall der Länge 2L sich nicht symmetrisch um den Punkt $x=0$ befindet,sondern um $(m+n):2$. Somit ist das Intervall jetzt $[m,n]$ mit $m<n$. Dann werden die Koeffizienten ähnlich berechnet. Man ändert die Integralgrenzen, d.h. man setzt für $-L,L$ einfach m bzw. n ein.

(/2/S.434f.)

2.4. Entwicklung in reine Cosinus- bzw. Sinusreihen

Bevor wir zu unserem eigentlichen Thema übergehen , werden wir einige Vorbetrachtungen anstellen.

A) f(x) sei eine im Intervall $[-\pi,\pi]$ gegebene eigentlich oder uneigentlich integrierbare, ungerade Funktion. So gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \ .$$

Um das zu zeigen braucht man nur das Integral in zwei Teilintegrale mit den Teilintervallen $[-\pi,0]$ und $[0,\pi]$ aufzuspalten. Es ist vorstellbar, daß die beiden Flächeninhalte gleich groß sind, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Somit heben sich diese beiden Integrale auf.

B) f(x) besitze jetzt ähnliche Eigenschaften wie in A). Der einzige Unterschied ist, daß die Funktion gerade ist. Somit ergibt sich:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx \ .$$

(Beweisansatz siehe oben)

Nun werden wir diese Vorbetrachtungen auf die Fourierreihen anwenden.

Die zu beschreibende Funktion sei absolut integrierbar in $[-\pi,\pi]$ und gerade. Dann ist das Produkt aus ihr und der ungeraden Sinusfunktion ungerade und somit

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \ .$$

Wir erhalten eine Fourierreihe die nur aus reinen Cosinusgliedern besteht.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Ist f(x) absolut integrierbar und ungerade in $[-\pi,\pi]$, dann ist das Produkt aus ihr und der geraden Cosinusfunktion ebenfalls ungerade, und für alle a_n gilt:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 \ .$$

Somit bleibt eine Fourierreihe mit reinen Sinusglieder übrig.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

(/2/S.435ff.)

2.5. Beispiele

1.Beispiel:

Zuerst wollen wir die Funktion

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

für das Intervall $(0,2\pi)$ in eine Fourierreihe entwickeln.
Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten nehmen wir die Formeln aus dem Kapitel 2.1.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\, dx = \frac{1}{2*\pi}\left[\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos(nx)\, dx$$

partielle Integration

$$u(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad u'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$v'(x) = \cos(nx)$$

$$v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}\left[(\pi - x)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}\left[(\pi - x)\sin(nx) \quad - \frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\, dx$$

partielle Integration

$$u(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad u'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$v'(x) = \sin(nx)$$

$$v(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi n}\left[(\pi - x)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi n}\left[(\pi-x)\cos(nx) + \frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

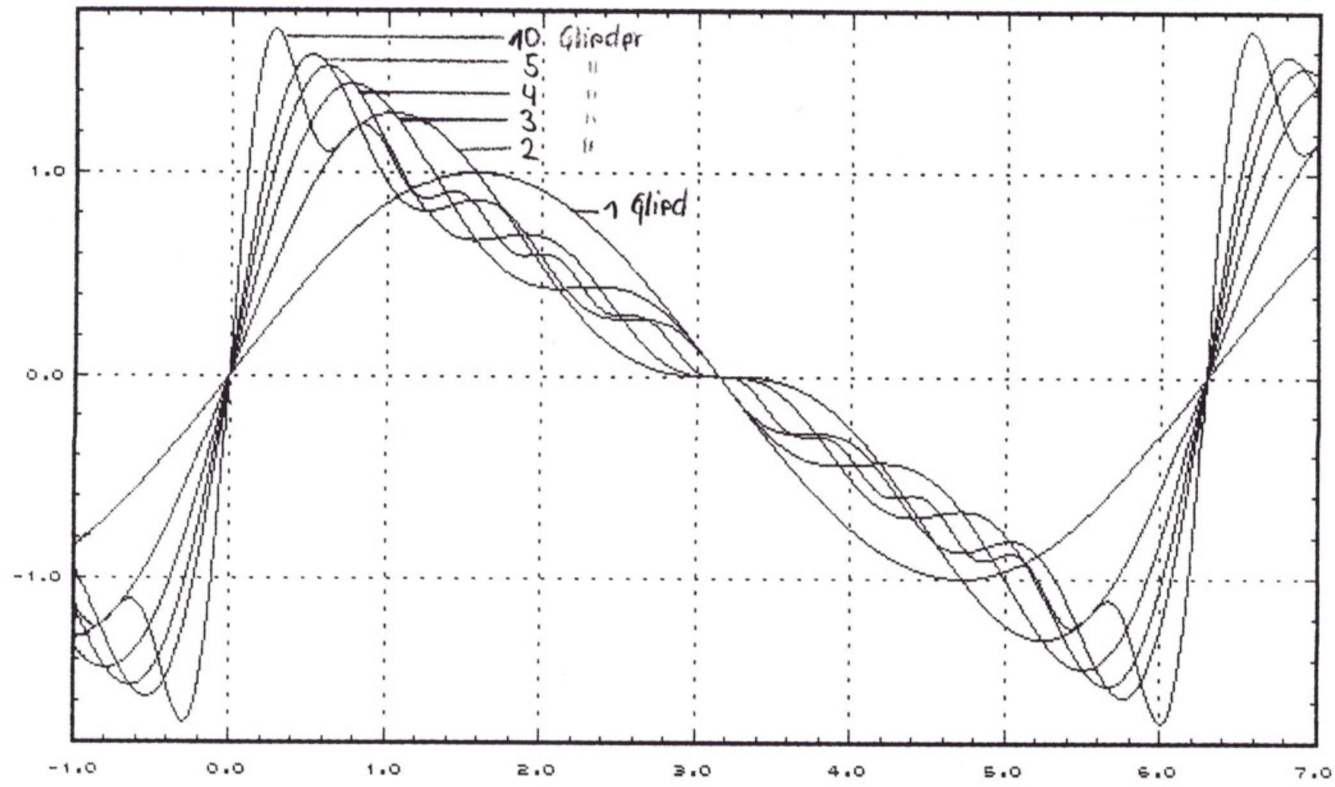
$$b_n = \frac{1}{n}$$

Somit erhalten wir die recht einfache Entwicklung mit reinen Sinusgliedern :

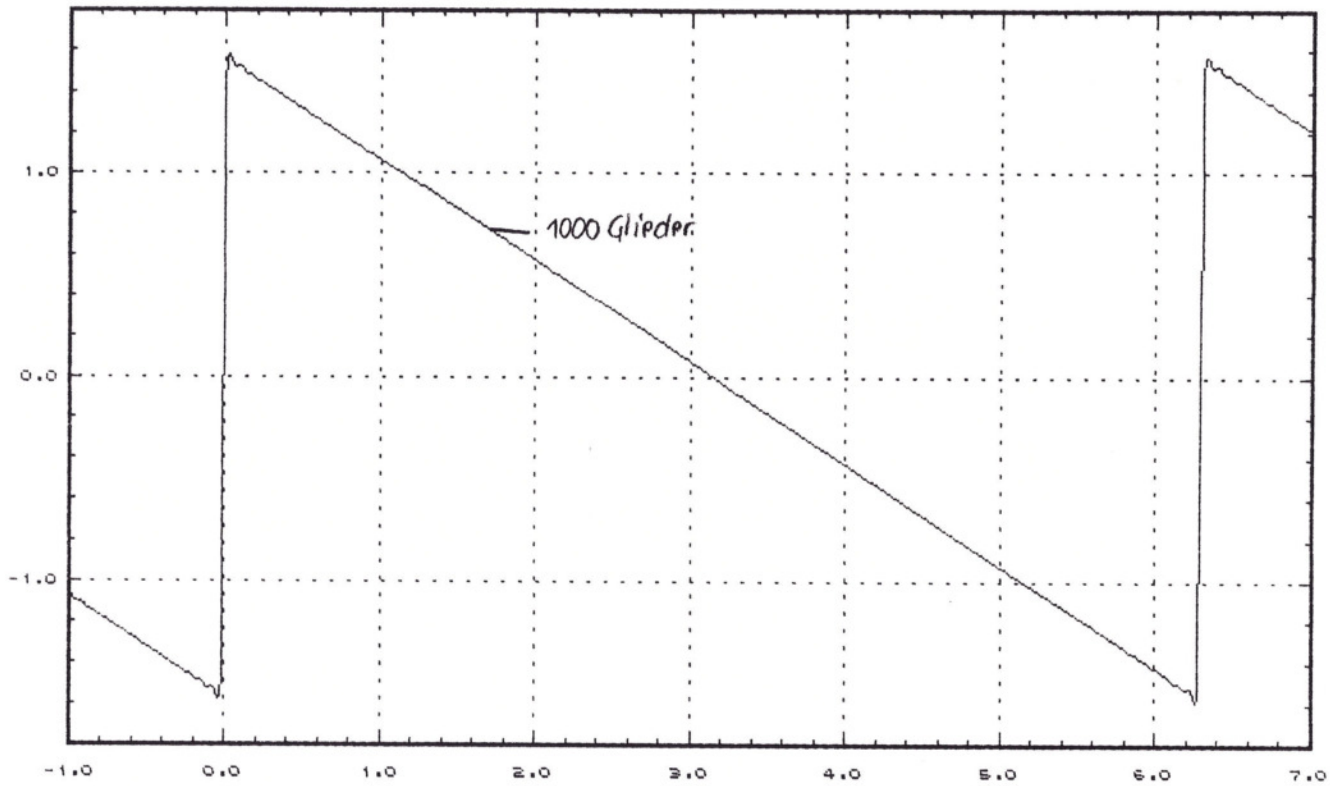
$$f(x) = \frac{\pi-x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (0<x<2\pi).$$

Die graphische Darstellung finden Sie auf der kommenden Seite. Im oberen Koordinatensystem sieht man, wie sich die Fourierreihe mit steigenden n (Anzahl der Glieder) an die zu beschreibende Funktion annähert. n ist 1,2,3,4,5,10. Im unteren Koordinatensystem haben wir die Reihe für 1000 Glieder ausdrucken lassen.

(/2/S.439)



10. Glieder
5. "
4. "
3. "
2. "
1 Glied
1.0
0.0
-1.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0



1000 Glieder
1.0
0.0
-1.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0

2.Beispiel:

Ohne größere Rechnung können wir vom voherigen Beispiel eine weitere interessante Entwicklung ableiten. Wir kennen bereits die Formel:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (0<x<2\pi).$$

Nun setzen wir ganz einfach 2x für x und dividieren dann durch 2. Wir erhalten:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{2n} \qquad (0<x<\pi).$$

Wenn wir nun die jeweils rechten bzw. linken Seiten voneinander subtrahieren, dann folgt daraus:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{2n} \qquad (0<x<\pi)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots + \frac{\sin(2nx)}{2n} + \ldots$$

$$- \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(4x)}{4} - \ldots - \frac{\sin(2nx)}{2n} - \ldots$$

Wie man leicht sieht, heben sich alle Glieder mit geradzahligen Vielfachen von x auf.Es bleibt somit übrig:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

Wir hatten uns auf das Intervall $(0,\pi)$ beschränkt. Es aber gar nicht schwer den Definitionsbereich auf alle reellen x mit Ausnahme der Vielfachen von .
Wir wissen, daß sin(x) in den Intervallen $(2w\pi,(2w+1)\pi)$, wobei w eine natürliche Zahl ist, gößer als Null ist.Deshalb gilt für diese Intervalle:

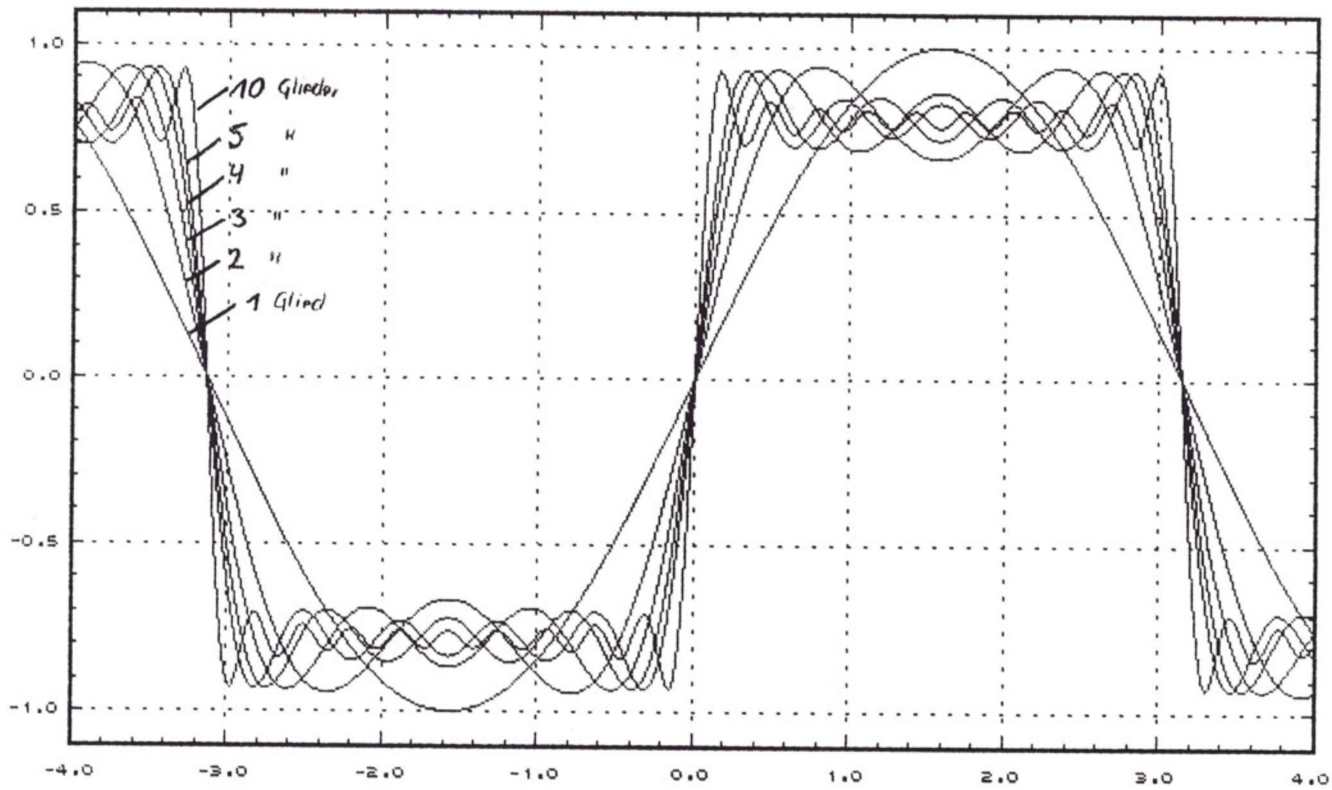
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1} \quad .$$

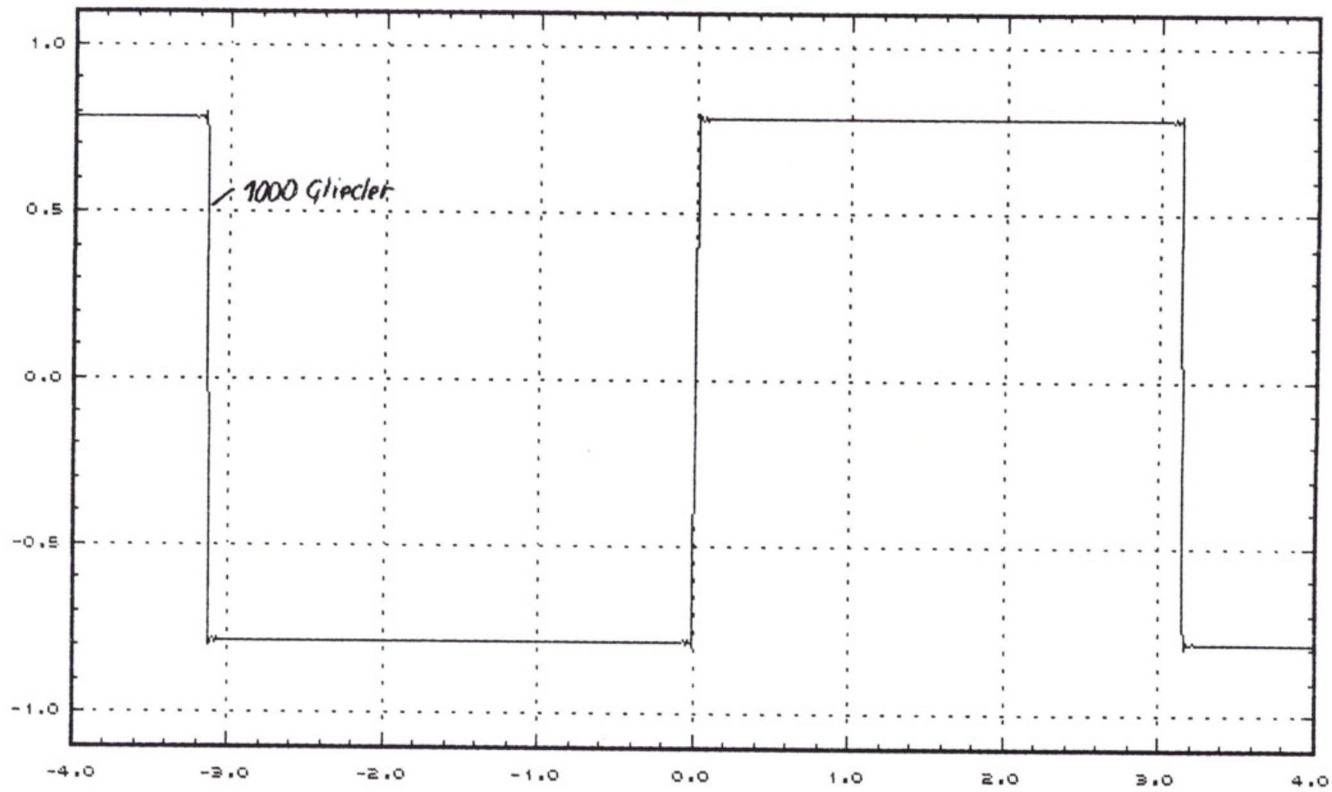
Für die übrigen Intervalle $((2w+1)\pi,2w\pi)$ ist sin(x) kleiner Null, somit brauchen wir einfach die linke Seite mit (-1) multiplizieren. Somit für diese Intervalle gilt:

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1} \quad .$$

Für unsere Überlegungen ist natürlich die gegebene Periodizität der Sinusfunktion eine entscheidende Grundvoraussetzung.
Auf der folgenden Seite sind zwei Bilder zu dieser Entwicklung abgebildet. Im ersten Koordinatensystem ist die Annäherung der Fourierreihe an die zu beschreibende Funktion dargestellt. Man sieht die Reihe für 1,2,3,4,5,10 Glieder.Im unteren Bild haben wir die Fourierreihe für 1000 Glieder ausdrucken lassen.

Die beiden ersten Beispiele stellen zwei unstetige Funktionen dar. In den Bildern ist gut zu sehen, daß die Fourierreihen den Funktionen sehr nahe kommen. Man erkennt auch einen entscheidenden Vorteil der Reihen, sie sind im gesamten Bereich der reellen Zahlen stetig. Die stetigkeit der Reihe folgt aus ihrer gleichmäßigen Konvergenz.


10 Glieder
5 "
4 "
3 "
2 "
1 Glied
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-4.0
-3.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0


1000 Glieder
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-4.0
-3.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0

3.Beispiel

Im folgenden Beispiel wollen wir auf die Kapitel 2.2., 2.3. und 2.4. etwas näher eingehen.
Wir werden die Funktion $y=f(x)=x^2$ in eine Fourierreihe für x [-1,1] entwickeln. Aus dem Mathematikunterricht ist uns bekannt, daß $f(x)=x^2$ eine gerade Funktion ist, d.h. daß die dazugehörige Fourierreihe aus reinen Kosinusgliedern besteht (siehe Kapitel 2.4.). Für die Berechnung der a_n benutzen wir die Formeln aus 2.3.
Zuerst substituieren wir wie folgt:

$$x = \frac{y}{\pi} \quad (-\pi < y \leq \pi) \text{ , da } L=1 \text{ .}$$

Somit ergeben sich folgende Formeln für die Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{y}{\pi}\right)^2 dy$$

$$a_0 = \frac{1}{6\pi^3}\Big[\, y^3 \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi}\right)\cos(ny)\ dy$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny)\ dy$$

partielle Integration

$u(y)=y^2 \qquad u'(y)=2y$

$v'(y)=\cos(ny)$

$v(y)=\frac{\sin(ny)}{n}$

$$a_n = \frac{1}{\pi^3}\left[y^2\frac{\sin(ny)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} 2y\sin(ny)\ dy$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} 2y\sin(ny)\ dy$$

partielle Integration

$u(y)=y^2 \qquad u'(y)=2x$

$v'(y)=\sin(ny)$

$v(y)=-\frac{\cos(ny)}{n}$

$$a_n = \left[\frac{2y\cos(ny)}{n^2\pi^3}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny)\, dy$$

$$a_n = \left[\frac{2y\cos(ny)}{n^2\pi^3} - \frac{2\sin(ny)}{n^3\pi^3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Wenn man nun die Grenzen laut Fundamenatalsatz der Integralrechnung einsetzt, erhalten wir für a_n:

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \quad .$$

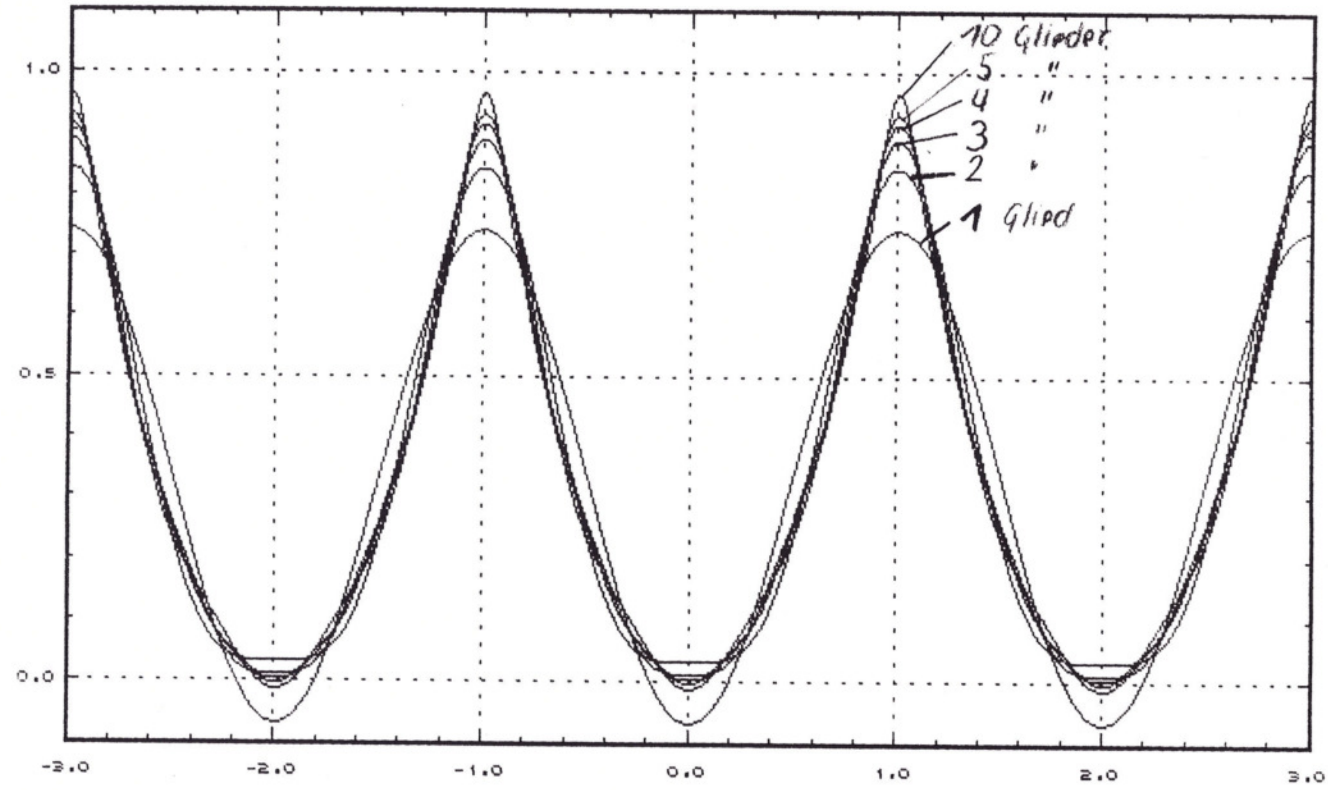
Somit ergibt sich für die Reihe:

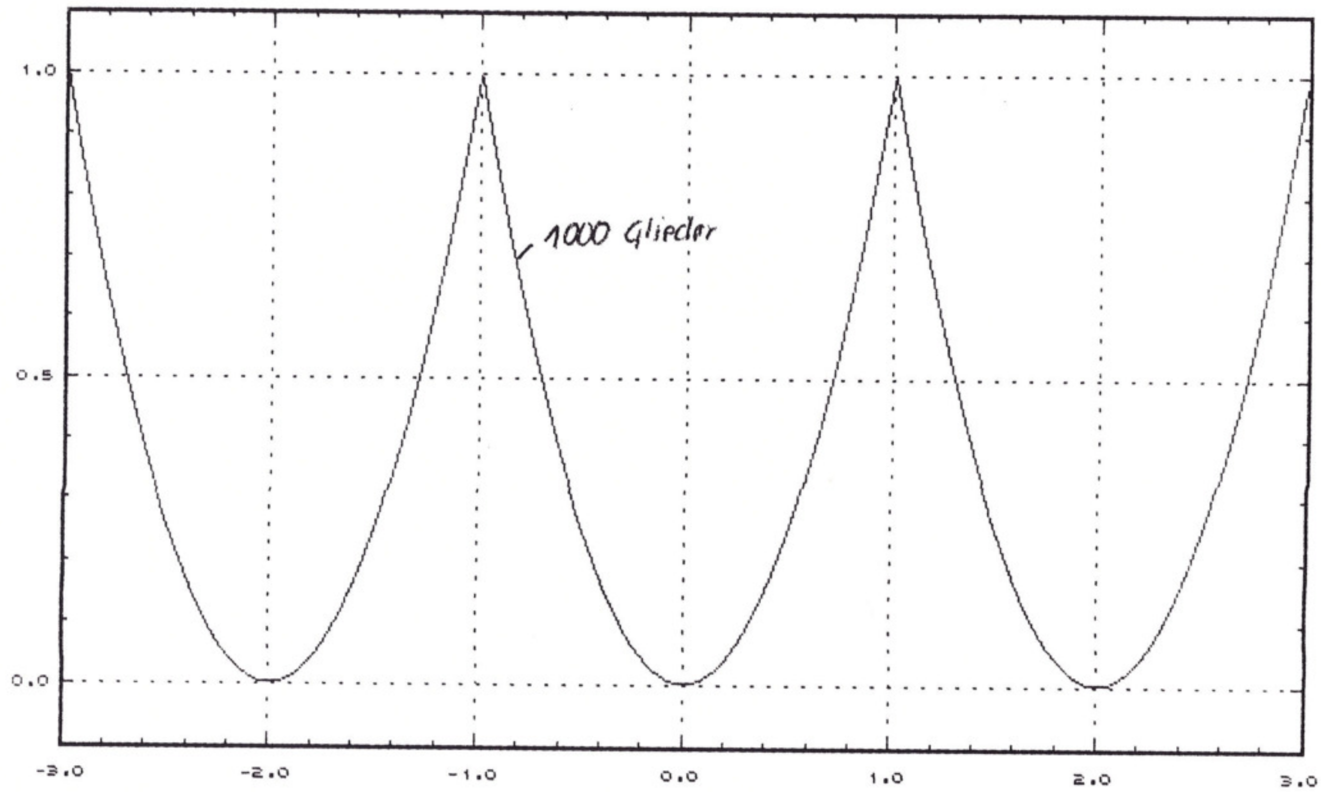
$$f\left(\frac{y}{\pi}\right) \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos(ny) \quad .$$

Unsere Variable war aber x. Wir müssen, um eine Abhängigkeit von ihr zu erhalten, einfach die Substitution rückgängig machen.Wir erhalten folgende Fourierreihe:

$$x^2 \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos(nx\pi) \quad .$$

Auf der kommenden Seite finden Sie wiederum zwei Bilder. Im oberen ist die Reihe für 1,2,3,4,5 sowie 10 und im unteren für 1000 Glieder dargestellt.


10 Glieder
5 "
4 "
3 "
2 "
1 Glied
1.0
0.5
0.0
-3.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0


1000 Glieder
1.0
0.5
0.0
-3.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0

3. Das Problem der schwingenden Saite

3.1. Geschichtliche Hintergründe

Im folgenden Abschnitt wollen wir zeigen, wie wichtig das Problem der schwingenden Saite für die Entwicklung der Analysis (Anmerkung 1) war. Man kann sagen, daß durch jenes Problem dieses Wissensgebiet der Mathematik erst zu existieren begann.
Pythagoras (etwa 580-496 v.u.Z.) beschäftigte sich als erster mit der Saite. Er untersuchte aber nur den Einfluß der Länge auf den Klang. Seine Forschungen blieben bis zum Mittelalter und der Renaissance die einzigen. Im Jahre 1636 entdeckte Martin Mesemme (1588-1648), daß eine Saite gleichzeitig mehrere harmonische Töne (Ober- und Untertöne) erzeugt. Weitere 41 Jahre später gelang es John Walles (1616-1703) Schwingungsknoten (Ruhepunkte der Schwingungswellen) nachzuweisen. Das waren wichtige physikalische Vorbetrachtungen, auf die sich spätere Mathematiker berufen sollten, z.B. Daniel Bernoulli. Trotzdem kam es erst im Jahre 1713 zu einer entscheidenden Wende, als der Mathematiker Taylor (1685-1731) folgende Formeln für die Momentaufnahme der schwingenden Saite und deren Frequenz aufstellte.

$$y = A\sin\left(\frac{\pi * x}{l}\right)$$

l Saitenlänge
A Konstante

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T * g}{m}}$$

T Spannung
g Erdbeschleunigung
m Masse

Diese beiden Formeln wurden 14 Jahre später durch Johann Bernoulli (1667-1748) bestätigt. Er ging wie schon 1646 Huygens (1629-1695) von einem masselosen Faden aus, der mit n gleichschweren, gleichverteilten Massestücken behängt wurde. D'Alembert (1717-1783) übernahm diese Methode und kam 1747 zu der revolutionären Grundgleichung der schwingenden Saite, nachdem er die Anzahl der Massestücken gegen Unendlich gehen ließ.

$$a^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

(Diese Gleichung werden wir im folgenden Abschnitt herleiten.)
Weiterhin stellte sich Jean d'Alembert die Frage, wie die Saite außerhalb des Intervalls [0,L] schwingt. Er fand keine Antwort darauf. Da gab es aber noch den Mathematiker Leonard Euler (1707-1783). Er hatte schon 1747 das Problem Mesemmes durch die Superposition (Überlagerung) von n Eigenschwingungen beschrieben. Darauf aufbauend gab er folgende Formel an :

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin\frac{i\pi x}{L} * \cos\frac{i\pi a t}{L},$$

wobei er die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null setzte. Um das

Problem für alle reellen x zu definieren, tat er etwas ganz entscheidendes. Er spiegelte y $(0 \leq x \leq L)$ am Koordinatenursprung und setzte die Funktion durch Aneinanderreihung fort. D'Alembert mißfiel das. Dadurch begann ein Streit zwischen ihm und Euler, der niemals endete solange sie lebten. 1753 gelangte Daniell Bernoulli (1700-1783) mit Hilfe eines physikalischen Ansatzes zu Eulers Formel. Nur behauptete er, daß die Anfangsgeschwindigkeit beliebig sei, d.h. die Formel beschreibt den allgemeinsten Fall. Wiederum gab es Streit zwischen Wissenschaftlern.
Einige Jahre späte, genau 1777, gelang es Euler wider Erwarten die Koeffizienten c_n seiner Reihe zu bestimmen (Kapitel 2.1.). Trotzdem war das Problem nicht vollends gelöst, da sich Euler nicht vorstellen konnte, daß alle Funktionen durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sind. Erst Fourier (1768-1830) äußerte diese Behauptung 1807 erstmals öffentlich. Ihm war es auch vergönnt das Problem der schwingenden Saite vollständig zu lösen. Ma muß auch sagen, daß er viel für die nach ihm benannten Fourierreihen getan hatte.
Das soll es mit historischen Betrachtungen gewesen sein. Im folgenden wollen wir das Problem der schingenden Saite ausführlich beschreiben. Wir haben dazu die Quelle /4/S.411ff. hauptsächlich benutzt.

Physikalisches Grundlagen

Wir gehen davon aus, daß unsere schwingende Saite ein dünner, homogener, verbiegbarer Faden ist, der im Ruhezustand nicht durchhängt (Bemerkung: Homogen bedeutet, daß er überall die gleiche Querschnittsfläche und die gleiche Dichte hat). Außerdem besitzt er die Länge l und ist an den Enden fest eingespannt. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die maximale Auslenkung und der Anstieg klein sein sollen.

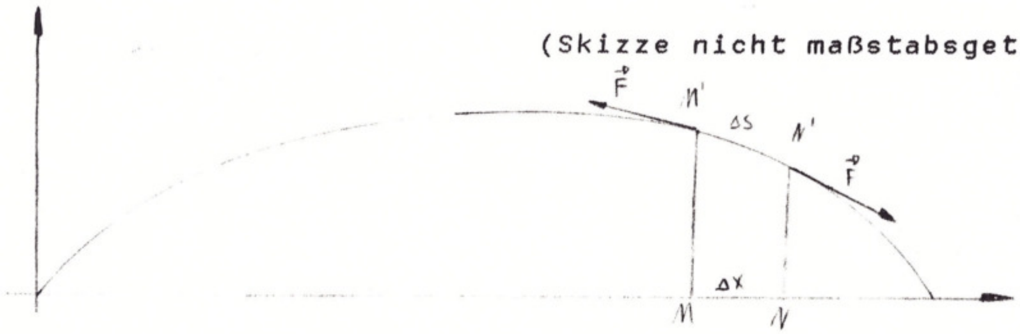
Bemerkung:

Dieses Beispiel ist falsch, da der Anstieg für kleine x groß.

Dieses Beispiel ist richtig .

Das bedeutet, die Saite darf nicht nahe der eingespannten Enden angestoßen werden. Weiterhin ist darauf zu achten, daß keine spitzen Gegenstände dazu verwendet werde. Dadurch würde ein Knick entstehen, und die Funktion, die den Anfangszuzstand beschreibt, *an dieser Stelle nicht differenzierbar* .

(Skizze nicht maßstabsgetreu)



Aus den aufgezählten Voraussetzungen lassen sich folgende Schlußfolgerungen ziehen :

* $\Delta x = \Delta s$ (I)
* $\tan(a) = \sin(a)$ (II)
* Jeder Punkt X schwingt streng vertikal .

Bemerkung:

$$\Delta s = \sqrt{(\partial y)^2 + (\partial x)^2} \qquad \text{(laut Pythagoras)}$$

$$\Delta s = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1} * dx \approx dx = \Delta x$$

Man vernachlässigt Quadrate kleiner Größen in der Physik, um die Rechnung zu vereinfachen.

$$\sin(a) = \frac{\tan(a)}{\sqrt{1+\tan^2(a)}}$$

$$\sin(a)=\frac{\tan(a)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\tan(a)$$ (Begründung s.letzte Seite)

Nun betrachten wir das Problem der angreifenden Kräfte , welche proportional zur Spannung sind, da die Querschnittsfläche konstant ist. Laut Physikunterricht gilt:

$$F = H * A \quad \text{(I)} . \; (\text{ H Spannung })$$

Die Spannung und somit auch die angreifende Kraft ist an allen Punkten der Saite betragsmäßig gleich, da die Längenänderung vernachlässigbar klein und der Faden homogen ist. Ihre Vektoren stimmen aber
nicht überein.
Wir greifen uns ein beliebiges Saitenstück M'N' heraus. An ihm wirkt die Kraft F im Punkt M' tangential nach links und im Punkt N'tangential nach rechts. Die Kräfte die die an den Punkten zwischen M'und N' angreifen, brauchen wir nicht zu berücksichtigen , da sie sich gegenseitig aufheben.

$$\vec{F_1} = \vec{F_{N'}} + \vec{F_{M'}}$$

$$F_1 = F\sin(\beta) - F\sin(a) \qquad \text{mit } F=A*H \text{ constant}$$

Dabei sind a,ß die Anstiegswinkel im Punkt M' bzw. N'.

$$F_1 = F[\sin(\beta)-\sin(a)]$$

$$F_1 = F[\tan(\beta)-\tan(a)] \quad \text{(laut II)}$$

$$F_1 = F\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{N'} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{M'}\right]$$

?(laut Definition des Anstiegs)

$$F_1 = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

Bemerkung: Laut Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$f(N)-f(M)=f'(x)(N-M) \qquad \text{mit } M \; x \; N$$

Wenn ich für f folgendes definiere : $f:=\frac{\partial y}{\partial x}$,

dann ergibt sich :

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{N'} - \left.\frac{\partial y}{\partial y}\right|_{M'} = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}\Delta x \quad , \text{ da } (N-M)= x.$$

Somit haben wir eine Abhängigkeit der Kraft, die wirklich an M'N' angreift, von x hergeleitet. Der beschriebene Vorgang ist aber auch von der Zeit abhängig und somit auch die angreifende Kraft. Zu deren Berechnung benutzen wir das Newtonsche Grundgesetz :

$$F_2 = m * a$$

(Kraft ist Masse mal Beschleunigung).

Für m ergibt sich:

$$m = \varrho * V \qquad (\varrho \text{ Dichte })$$

$$m = \varrho * A * \Delta s \qquad (\text{A Querschnittsfläche}),$$

und die Beschleunigung a ist der zurückgelegte Weg zweimal nach Zeit abgeleitet. Somit ist F :

$$F_2 = \varrho * A * \Delta s * \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F_2 = \varrho * A * \Delta x * \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (\text{laut I}).$$

Die beiden unterschiedlich berechneten Kräfte wirken am selben Teilstück M'N', somit sind sie auch betragsmäßig gleich. Wir können sie gleichsetzen :

$$F_1 = F_2 \quad .$$

$$F * \Delta x * \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varrho * A * \Delta x * \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Nun können wir x herauskürzen und die Konstanten A, ,F zu einer zusammenfassen .

$$(1) \qquad a^2 * \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{mit } a^2 := \frac{F}{A * \varrho}$$

Das ist die grundlegende Gleichung der schwingenden Saite, eine **partielle Differentialgleichung** (s.Anmerkung 4).Bevor wir mit der mathematischen Betrachtung beginnen, legen wir noch einige Rand- und Anfangsbedingungen fest .

$$(3) \qquad y(0,t) = y(l,t) = 0 \qquad (\text{Saite eingespannt})$$

$$y(x,0) =: f(x) \qquad (\text{Anfangsauslenkung})$$

$$\frac{dy(x,0)}{dt} =: g(x) \qquad (\text{Anfangsgeschwindigkeit})$$

(/2/S.538f.)

3.3. Mathematische Lösung

Wir werden nun die partielle Differentialgleichung (1) lösen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, die gesuchte Funktion $y=y(x,t)$ lasse sich als Produkt einer nur von x und einer nur von t abhängigen Funktion darstellen :

$$y(x,t)=X(x)*T(t).$$

Das bedeutet für die Differentialgleichung (1) nach Umstellen :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}a^2 \qquad (2)$$

Außerdem ergibt sich für die Randbedingungen (3) :

$$X(0) = X(1) = 0 \quad . \qquad (3')$$

Aus diesen Bedingungen folgt ebenfalls, daß

$f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ sein muß.

Jetzt wollen wir (2) lösen. Da links ein nur von t und rechts ein nur von x abhängiger Term steht, muß der Wert der Gleichung (2) gleich ener Konstanten c sein. Daraus ergibt sich durch Trennen der Gleichung :

$$T''(t)-cT(t) = 0 \qquad (5a)$$

und $$a^2X''(x)-cX(x) = 0 \qquad (5b)$$

Wir werden nun beweisen, daß die Konstante c kleiner als 0 sein muß. Dazu betrachten wir (5b). Wir multiplizieren diese Gleichung mit $X(x)$ und integrieren sie von 0 bis 1 nach x.

$$\int_0^1 X''(x)X(x)dx = \frac{c}{a^2}\int_0^1 [X(x)]^2 \, dx$$

Wenn man die rechte Seite partitiell *integriert und dabei (3')* beachtet, so ergibt sich:

$$-\int_0^1 [X'(x)]^2 \, dx = \frac{c}{a^2}\int_0^1 [X(x)]^2 \, dx \qquad (6)$$

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $[X'(x)]^2$. Dann ist für alle x aus $[0,1]$ $F'(x) \geqq 0$. Das bedeutet, daß $F(x)$ in diesem Intervall monoton wachsend ist. Insbesondere ist dann $F(1) \geqq F(0)$, woraus

$$\int_0^1 [X'(x)]^2 \, dx = F(1)-F(0) \geqq 0$$ folgt.

Analog kann man schlußfolgern, daß auch die rechte Seite von(6) größer Null ist. Wenn man dies in (6) berücksichtigt, so ergibt sich zwingenderweise, daß c kleiner Null ist.

Deshalb setzen wir:

$$c=-a^2\lambda^2 .$$

Dann nehmen (5a) und (5b) folgende Form an :

$$T''(t)+a^2\lambda^2 T(t) = 0 \qquad (5a)$$

$$X''(x)+\lambda^2 X(x) = 0 \qquad (5b).$$

Wir wollen diese Gleichungen nun lösen. Dies werden wir für (5a) tun. (5b) läßt sich analog lösen. Diese beiden Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungen dieser Gleichungen haben die Form

$$T(t) = Ke^{Lt},$$

wobei K und L noch zu bestimmende Konstanten sind. Dann ist

$$T''(t) = KL^2e^{Lt}.$$

Somit geht (5a) über in :

$$KL^2e^{Lt}+a^2\lambda^2Ke^{Lt} = 0.$$

Wenn man die triviale Lösung T=0 (K=0) außer acht läßt , kann man durch Ke^{Lt} dividieren, da die e-Funktion keine Nullstellen hat. Dann ist

$$L^2 = -a^2\lambda^2 ,$$

bzw.

$$L_{1/2} = \pm a\lambda i .$$

Man erhält zwei Lösungen :

$$T_1(t) = K_1e^{a\lambda it}$$

und

$$T_2(t) = K_2e^{-a\lambda it}$$

Wie man leicht sieht, ist auch T_1+T_2 eine Lösung von (5a). Außerdem sind bei entsprechender Wahl der Konstanten T_1 und T_2 in T_1+T_2 enthalten. Also ist

$$T(t) = K_1e^{a\lambda ti}+K_2e^{-a\lambda ti}$$

die Menge aller Lösungen von (5a).
Aufgrund von

$$e^{ix} = \sin(x)+ i \cos(x) ,$$

ist

$$T(t) = (K_1-K_2)\sin(a\lambda t)+ (K_1+K_2)i \cos(a\lambda t.)$$

Da wir an reellen Lösungen interessiert sind, müssen wir zulassen, daß beide K komplexe Zahlen sind. Also :

$$K_n = A_n+B_ni \qquad (n=1,2)$$

Dann ist

$$T(t) = (A_1-A_2)\sin(a\lambda t)+(B_1+B_2)\cos(a\lambda t)$$
$$+i[(B_1-B_2)\sin(a\lambda t)+(A_1+A_2)\cos(a\lambda t)$$

Deshalb gilt : Wenn $T(t)\in R$, dann muß

$$B_1 = B_2 \quad \text{und} \quad A_1 = -A_2 \text{ sein.}$$

Somit ist
$$T(t) = A\cos(a\lambda t)+B\sin(a\lambda t),$$
mit
$$A:=2B_1 \quad \text{und} \quad B:=2A_1$$
die allgemeine Lösung von (5a).

Analog ergibt sich :

$$X(x) = D\sin(\lambda x)+C\cos(\lambda x)$$

Aus (3') folgt für $X(0)=0$ $\quad C=0$

und für $X(l)=0$ $\quad \sin(\lambda x)=0$,

da bei $D=0$ $X=0$ und $y(x,t)=0$ sein müßten, was nicht unserer Zielstellung entsprechen würde. Damit $\sin(\lambda x)=0$ ist, muß

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \qquad \text{sein.}$$

Setzt man $\quad AD=a_n \quad$ und $\quad BD=b_n$,

so erhält man folgende Teillösungen:

$$y_n = [a_n\cos(a\lambda_n t)+b_n\sin(a\lambda_n t)]\sin(\lambda_n x) \tag{7}$$

Wie man leicht sieht, erfüllt auch die Summe beliebig vieler Teillösungen die Differentialgleichung (1). Es liegt daher nahe, die unendliche Reihe

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(a\lambda_n t)+b_n\sin(a\lambda_n t)]\sin(\lambda_n x) \tag{8}$$

zu betrachten.
Nun wollen wir unter der Annahme, daß die Reihe (8) gleichmäßig konvergiert, die Koeffizienten a_n und b_n bestimmen.
Dazu bilden wir die partielle Ableitung nach t.

$$\frac{dy}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}[-a_n a\lambda_n\sin(a\lambda_n t)+b_n a\lambda_n\cos(a\lambda_n t)]\sin(\lambda_n x) \tag{9}$$

Setzt man in (8) und (9) $t=0$, so folgt :

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(\lambda_n x) = f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a\lambda_n b_n\sin(\lambda_n x) = g(x).$$

Dann müssen a_n bzw. $a\lambda_n b_n$ die Fourierkoeffizienten der Funktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ sein.

Somit ist

$$a_n = \frac{2}{l} \quad f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{a\lambda_n l} \quad g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx$$

Wir wollen nun hinreichende Bedingungen dafür finden, daß die Reihe (8) nicht nur Lösung ist, sondern daß sie und ihre erste und zweite Ableitung nach x und t gleichmäßig konvergieren, damit man sie auch als Lösung einsetzen kann. Wir behaupten: Solche hinreichende Bedingungen sind :

$$a_n = 0\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\text{und} \quad b_n = 0\left(\frac{1}{n^4}\right) .$$

Das bedeutet:

$$|a_n| \leqq \frac{R}{n^4} \qquad R \text{ Konstante}$$

$$\text{und} \quad |b_n| \leqq \frac{S}{n^4} \qquad S \text{ Konstante} .$$

Wir kommen nun zum Beweis unserer Behauptung.
Es gilt:

$$|y| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(a\lambda_n t)+b_n\sin(a\lambda_n t)]\sin(\lambda_n x)\right|$$

$$|y| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$$

Aufgrund unserer Bedingung ist

$$|y| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(R+S)}{n^4}.$$

Die Zahlenfolge auf der rechten Seite ist konvergent, also konvergiert nach dem Weierstraßschen Kriterium die Reihe y gleichmäßig. Wenn wir die Reihe formal gliedweise nach x differenzieren, dann erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n[a_n\cos(a\lambda_n t)+b_n\sin(a\lambda_n t)]\cos(\lambda_n x)$$

Das kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\frac{dy}{dx} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}(|a_n|+|b_n|).$$

Aufgrund unserer Bedingung ist also:

$$\frac{dy}{dx} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(R+S)\pi}{l} * \frac{1}{n^3} \quad .$$

Die Zahlenfolge rechts ist konvergent, also ist nach Weierstraß die Reihe links gleichmäßig konvergent. Wir differenzieren diese Reihe ein zweites Mal nach x und erhalten mit unserer Bedingung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{l^2} * \frac{(R+S)}{n^4}$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(R+S)\pi^2}{n^2 l^2} \quad .$$

Da die rechte Seite konvergiert, ist nach Weierstraß die linke Seite gleichmäßig konvergent. Analog dazu erhält man, daß auch die erste und zweite Ableitung von y nach t unter dieser Bedingung gleichmäßig konvergieren. Die Bedingung ist also hinreichend.

Natürlich ist es bequemer, wenn man gleich an den Eigenschaften der Funktionen f und g ablesen kann, ob die Reihe y als Lösung möglich ist. Man muß also Bedingungen für die Diffentierbarkeitseigenschaften angeben, so daß

$$a_n = 0\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad \text{und} \qquad b_n = 0\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{gilt .} \qquad (\#)$$

Wir behaupten daher: Wenn f viermal und g dreimal differenzierbar sind und die vierte bzw. dritte Ableitung beschränkt sind, so gelten die Bedingungen (#).

Beweis: Es gilt:

$$|a_n| = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad .$$

Wir integrieren partiell:

$$|a_n| = -\left[\frac{2}{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} * \frac{l}{n\pi}\right]_0^l + \frac{2}{n\pi}\int_0^l f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$|a_n| = \frac{2}{n\pi}\int_0^l f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad ,$$

da f(l)=f(0)=0. Wenn wir dies nochdreimal wiederholen, so erhalten wir:

$$|a_n| = \frac{2l^3}{\pi^4 n^4}\int_0^l f^{(4)}(x)\sin(\frac{x\pi n}{l})dx.$$

Da die vierte Ableitung beschränkt ist, also

$$|f^{(4)}(x)| \leqq K \; ,$$

so ist

$$|a_n| \leqq \left|\frac{l^3}{n^4\pi^4}\int_0^l K\;dx\right|$$

$$|a_n| \leqq \left|\frac{Kl^4}{n^4\pi^4}\right|$$

Demzufolge ist

$$a_n = O\left(\frac{K'}{n^4}\right) \quad , \text{ mit } K'=\frac{Kl^3}{\pi^4}$$

Dies kann man analog mit b_n und g durchführen, muß aber beachten, daß in der Formel für b_n der Faktor n^{-1} (in λ_n) schon einmal vor dem Integral steht. Also genügt es, wenn die dritte Ableitung von g beschränkt ist.
Wenn man die partielle Integration solange fortsetzt, bis man auf ein beschränkte k-te Ableitung stößt (k>3), dann sind die a_n und b_n von noch höherer Ordnung klein. Man sieht leicht, daß dadurch die Bedingungen (#) erst recht erfült sein müssen.

(/2/S.540ff.)

4.4. Nachbetrachtungen

Die Schwingung, die durch die Gleichung (8) beschrieben wird, setzt sich aus unendlich vielen Einzelschwingungen y_n zusammen.Diese sind durch die Gleichung (7) definiert.
Es gilt:

$$y_n = [a_n \cos(a\lambda_n t)+b_n \sin(a\lambda_n t)]\sin(\lambda_n x).$$

Wenn wir für a_n und b_n folgendes annehmen:

$$a_n = A_n \sin(\alpha_n),$$

$$b_n = A_n \cos(\alpha_n),$$

dann können wir schlußfolgern:

$$y_n = A_n \sin(a\lambda_n t+\alpha_n)\sin(\lambda_n x) \quad .$$

(laut Additionstheorem)

Das ist eine recht einfache Gleichung für die Elementarschwingungen y_n. Alle Punkte dieser Einzelschwingungen schwingen mit der selben Frequenz und Periode, der jeweils eine bestimmte Tonhöhe entspricht. Die Amplitude ist von der Lage des Punktes abhängig.

$$y_{n\ max} = A_n \left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right|$$

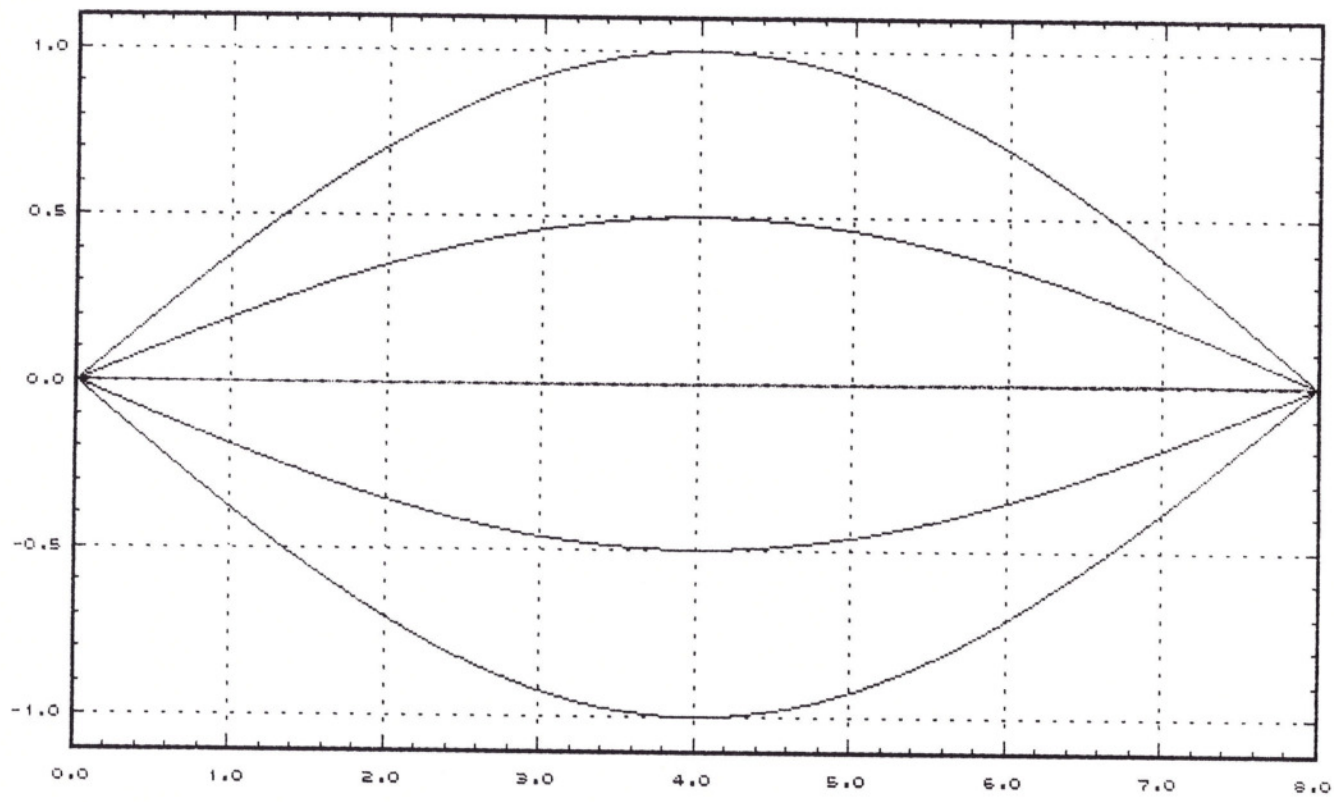
Wenn man die Saite in n gleiche Teile zerlegt, dann schwingen Punkte desselben ,des benachbarten Teilstückes in gleicher bzw. entgegengesetzter Phase.
Man sieht ganz deutlich die Knoten (Ruhepunkte) zwischen benachbarten Teilstücken und die Bäuche (maximale Auslenkung). Dies nennt man stehende Welle. Daher wird die Fouriersche Methode auch als Methode der stehenden Welle bezeichnet. Der Grundton wird durch die Komponente y_1 bestimmt. Ihm entsprechen die Frequenz:

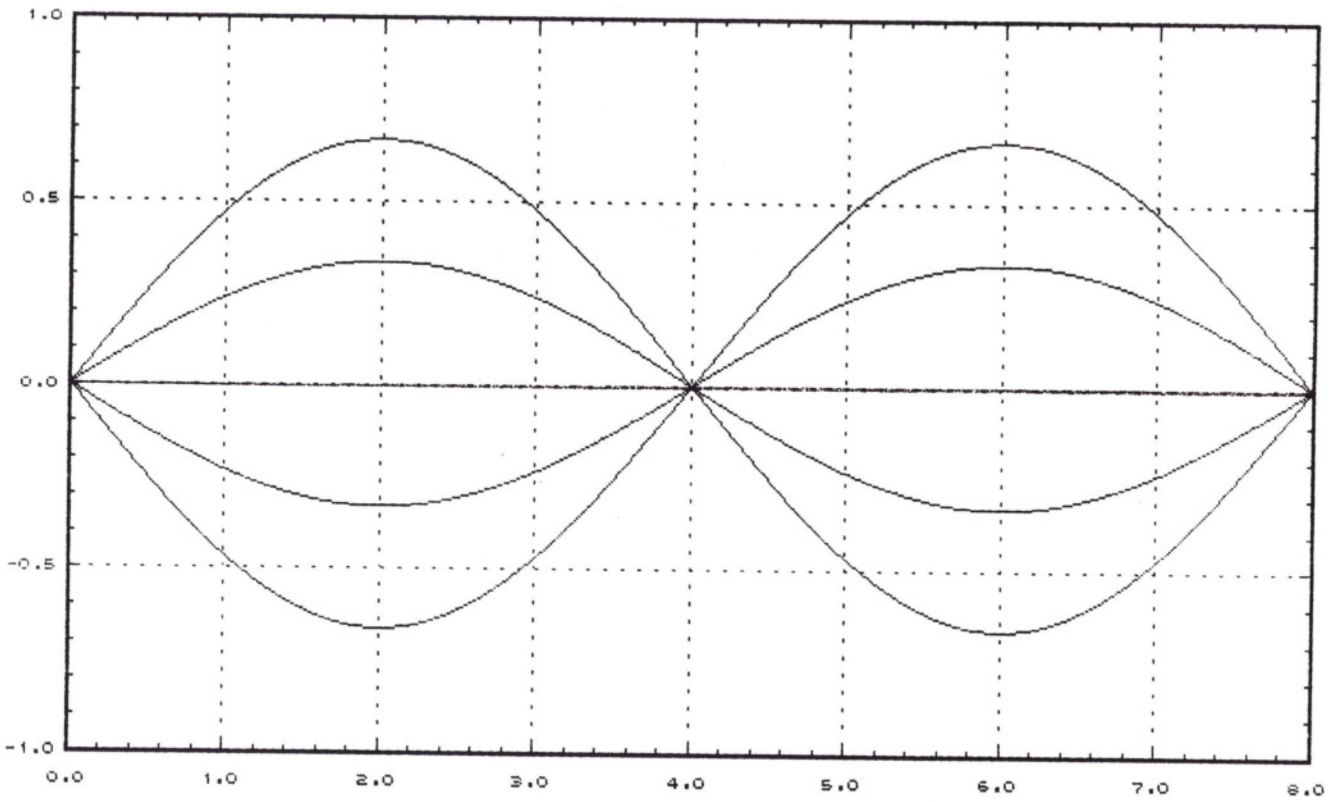
$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho}}$$

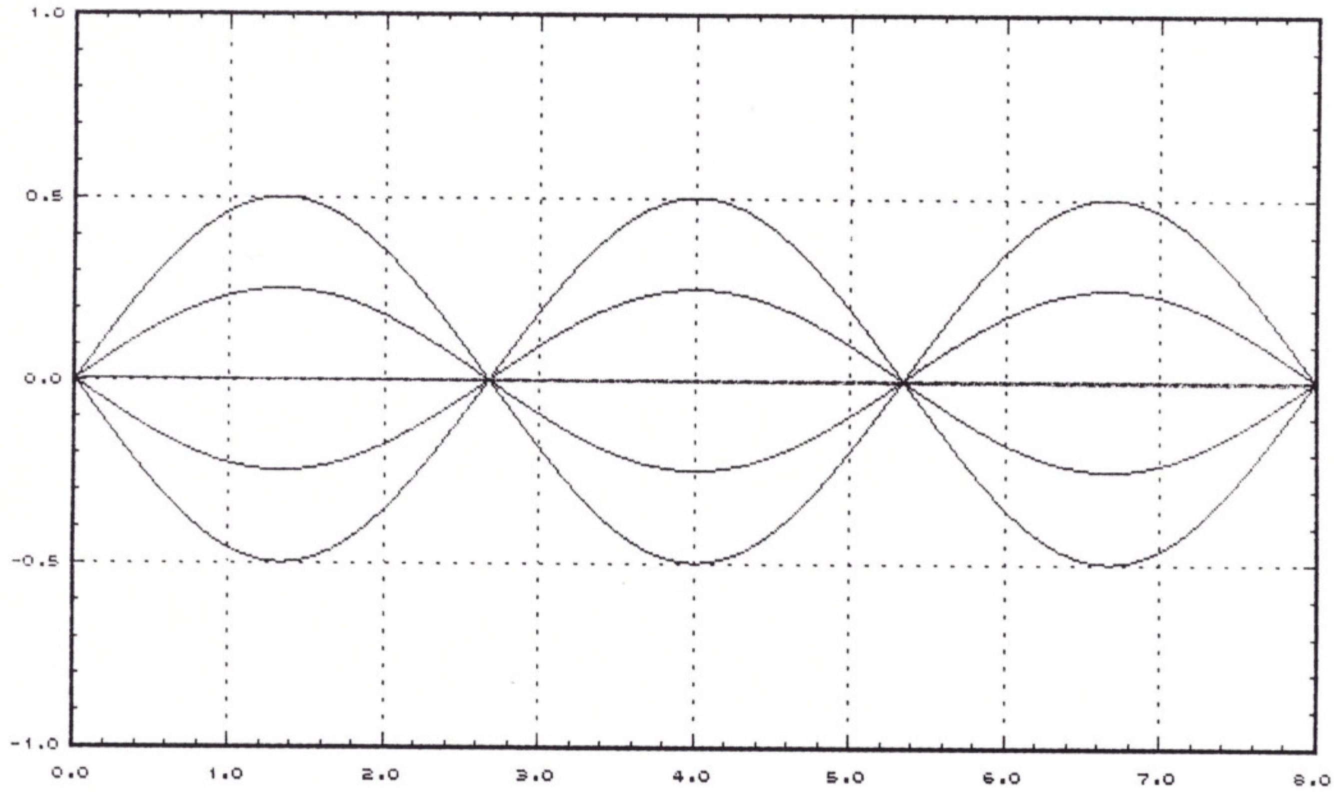
und die Periode:

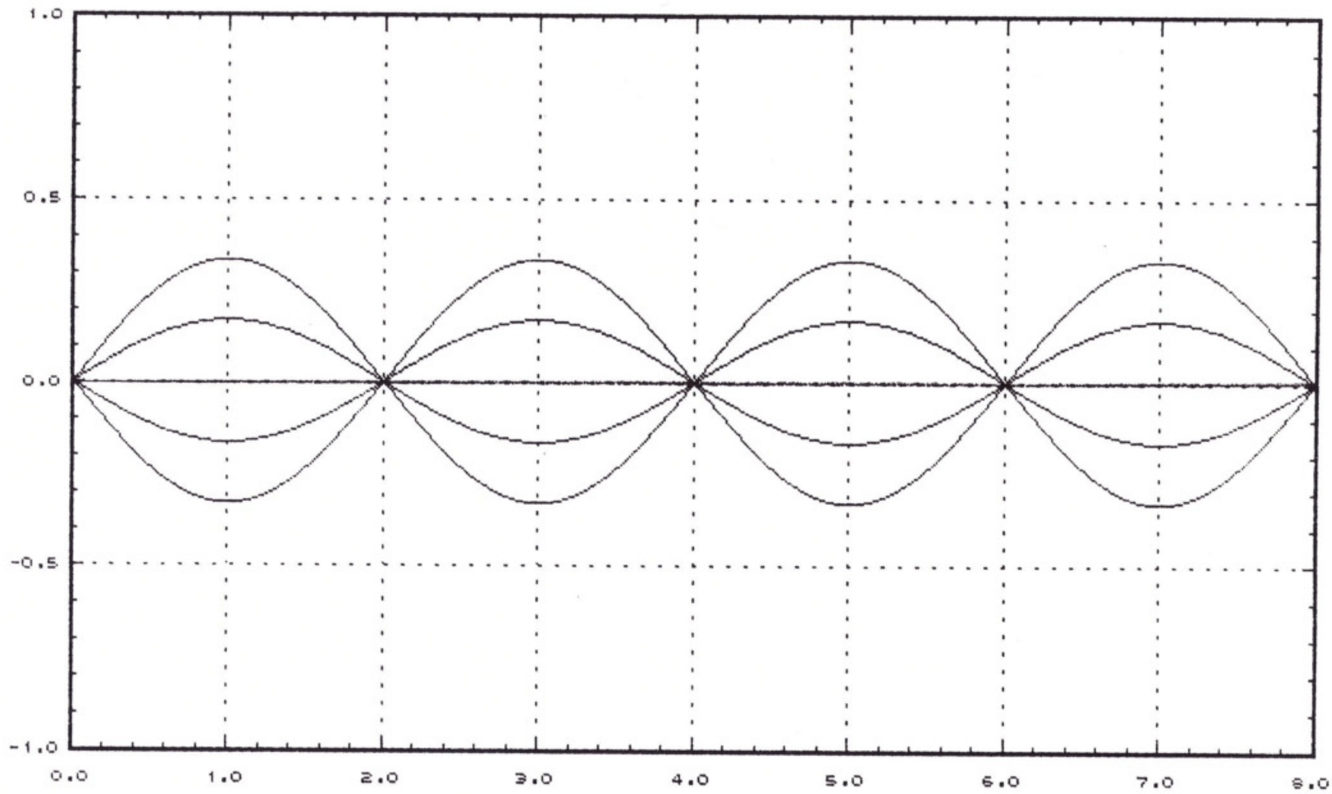
$$T_1 = 2l\sqrt{\frac{\rho}{H}} \quad .$$

Die übrigen Elementarschwingungen charakterisieren eine bestimmte Färbung des Tones, seine Timbre. Aufgrund unserer ermittelten Gleichung kann man noch mehr über die erzeugten Töne der Saite angeben. Wir wollen es aber bei dem schon erwähnten belassen.
Auf den folgenden beiden Seiten haben wir die ersten Elementarschwingungen eines beliebigen Beispiels dargestellt. Man sieht jeweils die maximale und einige Zwischenauslenkungen. Wie geben keine Gleichung an, da die Reihe nicht unseren geforderten Bedingungen genügt. Es soll nur das zuletzt erzählte etwas verdeutlichen.


1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0


1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0


1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0


1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0

Literaturverzeichnis

/1/ G.M.Fichtenholz: Differential-und Integralrechnung II. -9.Aufl.- Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973

/2/ G.M.Fichtenholz: Differential-und Integralrechnung III. -7.Aufl.- Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1974

/3/ H.Heuser : Lehrbuch der Analysis II.-2.Auflage- Stuttgart: Teubnerverlag, 1981

/4/ H.Heuser : Gewöhnliche Differentialgleichungen.-4.Auflage- Stuttgart: Teubnerverlag, 1989

/5/ W.Gellert: Kleine Enzyklopädie Mathematik.-13.Auflage- Leipzig: Bibliographisches Institut, 1986

/6/ W.Gellert: Lexikon der Mathematik.-4.Auflage- Leipzig: Bibliographisches Institut, 1985

Verzeichnis der Fremd- und Fachworterläuterungen

1. Analysis	A. ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich vorwiegend mit Funktionen, ihren Grenzwerten sowie der Differential- und Integralrechnung beschäfigt. (Duden)
2. Absolute Reihe	Eine a.R. wird aus den absoluten Beträgen der Glieder eine Reihe $r_n(x)$ gebildet. Für die a.R. schreibt man $\|r_n(x)\|$.
3. Absolute Integrierbarkeit	Diese Eigenschaft bezieht sich in unserer Arbeit auf Reihen. Deshalb gilt: Eine Reihe ist absolut integrierbar, wenn ihre absolute Reihe integrierbar ist.
4. Partielle Differentialgleichung	"Eine p.D. ist eine Gleichung zwischen unabhängigen Variablen einer gesuchten Funktion und deren partiellen Ableitungen." (/6/S.408)
5. Partielle Ableitung	"Eine p.A. ist gleich der gewöhnlichen Ableitung der Funktion einer Variablen x_i, die man aus $z=f(x_1,x_2,...,x_i, ...,x_n)$ erhält, wenn man alle Variablen außer x_i als Konstanten betrachtet." (/5/S.464)

Selbständigkeitserklärung

Wir versichern, daß wir die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt haben.

Leipzig, den 27.5.1991

....

....

Spezialschule "Wilhelm Ostwald" Leipzig, den 25. Januar 1991

Hinweise zu Verteidigungen der Abschlußarbeiten im Fach wpA

- Die Verteidigung der Abschlußarbeiten hat den Charakter einer mündlichen Reifeprüfung

- Sie kann nur erfolgen, wenn die Abschlußarbeiten und auch die Thesen termingerecht angefertigt und sowohl beim Betreuer als auch beim stellvertretenden Direktor abgegeben werden;

- Zur Durchführung der Verteidigungen wird eine Prüfungskommission gebildet. Ihr gehören an mit beschließender Stimme:

  . der Vorsitzende (Direktor bzw. stellv. Direktor)

  . der Betreuer der wissenschaftlich-praktischen Arbeit

  . die Klassenlehrer der jeweiligen 11. Klasse oder ein Stellvertreter

  . weitere Fachlehrer im zu prüfenden Wissensgebiet

  mit beratender Stimme gehören an:

  . der jeweilige Fachlehrer für Deutsch der Klasse (oder ein beauftragter Kollege)

  . Vertreter des Elternrates/Schülerrates

- Die Verteidigung ist in der Regel öffentlich;

- Über die Durchführung der Verteidigung wird ein Protokoll angefertigt;

- Die Gesamtdauer der Verteidigung sollte 1 Stunde nicht überschreiten;

- Für den Ablauf der Verteidigung gelten folgende Festlegungen:

  1. Eröffnung und Begrüßung durch den Vorsitzenden der Prüfungskommission.

  2. Der wpA-Betreuer verliest die schriftliche Beurteilung der Schülerpersönlichkeit, gibt die Vornote im Fach wpA bekannt, schätzt die Abschlußarbeit ein und gibt die Note für die Arbeit bekannt.

  3. Die Schüler verteidigungen die Arbeitsergebnisse vor der Prüfungskommission.

  4. Der Betreuer und alle anderen Teilnehmer der Verteidigung können Fragen zur Arbeit, zu den Thesen und zu den Darlegungen der Schüler stellen.

  5. Die Prüfungskommission berät unter Ausschluß der Öffentlichkeit über die Ergebnisse der Verteidigung, einigt sich auf eine Prüfungsnote und auf die Abschlußnote, die gleichwertig mit der Vornote ist.

  6. Der Vorsitzende der Prüfungskommission schätzt die Verteidigung ein und gibt die Prüfungsnote und Endnote bekannt.

Termine zur Beachtung:

- zusammenhängende Arbeitswoche in der wpA: **22. - 26. 4. 1991**

- Verteidigungen der Abschlußarbeiten in der Woche vom: **3. - 7. 6. 1991** (bitte Terminvorschläge unterbreiten)